

**MUSEU MATEMÁTICO: PASSO A PASSO NA CRIAÇÃO DE ARTEFATOS
EDUCACIONAIS**



VALDIR MERIB MACHADO

DUELCI APARECIDO DE FREITAS VAZ



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|---|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☐ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☒ Produto Técnico e Educacional - Tipo: Material Didático | |

Nome Completo do Autor: Valdir Merib Machado

Matrícula: 20231020280094

Título do Trabalho: MUSEU MATEMÁTICO: PASSO A PASSO NA CRIAÇÃO DE ARTEFATOS EDUCACIONAIS

Autorização - Marque uma das opções

1. ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais incluídos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Jataí, 03/09/2025.
Local Data

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

- | | |
|---|---|
| ☐ Tese | ☐ Artigo Científico |
| ☐ Dissertação | ☐ Capítulo de Livro |
| ☐ Monografia – Especialização | ☐ Livro |
| ☐ TCC - Graduação | ☐ Trabalho Apresentado em Evento |
| ☒ Produto Técnico e Educacional - Tipo: Material Didático | |

Nome Completo do Autor: Duelci Aparecido de Freitas VAZ

Matrícula:

Título do Trabalho: MUSEU MATEMÁTICO: PASSO A PASSO NA CRIAÇÃO DE ARTEFATOS EDUCACIONAIS

Autorização - Marque uma das opções

1. ☒ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. ☐ Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ____/____/____ (Embargo);
3. ☐ Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

- ☐ O documento está sujeito a registro de patente.
☐ O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
☐ Outra justificativa: _____

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

- i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
- ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
- iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

_____, Goiânia _____, 20 ____/____/2025 _____.
Local Data

Duelci Aparecido de Freitas Vaz

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA



**MUSEU MATEMÁTICO: PASSO A PASSO NA CRIAÇÃO DE ARTEFATOS
EDUCACIONAIS**

Valdir Merib Machado

Duelci Aparecido de Freitas Vaz

Produto Educacional vinculado à dissertação:

**HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E ENSINO DESENVOLVIMENTAL NA
CONSTRUÇÃO DE UM MUSEU MATEMÁTICO**

JATAÍ

2025

Autorizo, para fins de estudo e de pesquisa, a reprodução e a divulgação total ou parcial desta dissertação, em meio convencional ou eletrônico, desde que a fonte seja citada.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)

Machado, Valdir Merib.

Museu Matemático: passo a passo na criação de artefatos educacionais
[manuscrito] / Valdir Merib Machado; Duelci Aparecido de Freitas Vaz. - 2025.
lxxxii; 82 f.; il.

Produto Educacional (Mestrado) – Material Didático – IFG – Câmpus Jataí,
Programa de Pós – Graduação em Educação para Ciências e Matemática, 2025.

Vinculado à dissertação: História da Matemática e Ensino Desenvolvidor
na construção de um Museu Matemático.

Inclui referências.

1. Ensino Desenvolvidor. 2. História da Matemática. 3. Museu Matemático.
I. Vaz, Duelci Aparecido de Freitas. II. IFG, Câmpus Jataí. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela Seção Técnica de Tratamento da Informação.
Bibliotecária – Rosy Cristina Oliveira Barbosa Sabino – CRB 1/2380 – Câmpus Jataí. Cód. F050/2025-2.



INSTITUTO FEDERAL
Goiás

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS JATAÍ

VALDIR MERIB MACHADO

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E ENSINO DESENVOLVIMENTAL NA CONSTRUÇÃO DE UM MUSEU MATEMÁTICO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Educação para Ciências e Matemática, defendida e aprovada, em 27 de junho do ano de 2025, pela banca examinadora constituída por: **Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz**, orientador e presidente da banca, **Prof. Dr. Maxwell Gonçalves Araújo** (Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás - IFG), membro interno, **Prof. Dr. Gustavo da Silva Mocó** (Secretaria de Educação do Estado de Goiás - Seduc-GO) e **Prof. Dr. Elias Rafael de Sousa** (Centro Universitário Alfredo Nasser -UNIFAN), membros externos.

(assinado eletronicamente)

Duelci Aparecido de Freitas Vaz
Presidente da Banca (Orientador – IFG)

(assinado eletronicamente)

Maxwell Gonçalves Araújo
Membro interno (IFG)

(assinado eletronicamente)

Gustavo da Silva Mocó
Membro externo (Seduc-GO)

(assinado eletronicamente)

Elias Rafael de Sousa
Membro externo (UNIFAN)

(assinado eletronicamente)

Valdir Merib Machado
Estudante do PPGECEM/IFG

Documento assinado eletronicamente por:

- GUSTAVO DA SILVA MOCO, GUSTAVO DA SILVA MOCO - Docente - Secretaria de Estado da Educação de Goiás (01409705000120), em 22/07/2025 01:28:16.
- Elias Rafael de Sousa, Elias Rafael de Sousa - 234515 - Docente de ensino superior na área de pesquisa educacional - Ifg - Câmpus Goiânia (10870883000225), em 08/07/2025 15:31:50.
- Maxwell Goncalves Araujo, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 01/07/2025 18:01:19.
- Duelci Aparecido de Freitas Vaz, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 01/07/2025 13:52:49.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 30/06/2025. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 666021

Código de Autenticação: e33ab8c8e4



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Av. Presidente Juscelino Kubitschek,, 775, Residencial Flamboyant, JATAÍ / GO, CEP 75804-714
(64) 3514-9699 (ramal: 9699)

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Bomba de água manual	13
Figura 2 – Espiral de Arquimedes	21
Figura 3- Representação do Teorema de Pitágoras com material concreto	26
Figura 4: Demonstração Geométrica do Teorema de Pitágoras	27
Figura 5: Roldanas de Arquimedes	33
Figura 6: Ilustração Didática do Teorema de Tales.....	40
Figura 7: Atividade experimental desenvolvida com estudantes	47
Figura 8: Um clássico da matemática	54
Figura 9: Esferas de Newton	61
Figura 10: Dispositivo a vapor de Heron	69
Figura 11: Astrolábio	75

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	11
1 PARAFUSO DE ARQUIMEDES	13
2 ESPIRAL DE ARQUIMEDES	11
3 TEOREMA DE PITAGORAS	26
4 ROLDANA DE ARQUIMEDES	33
5 TEOREMA DE TALES	40
6 CÁLCULO DO RAIOS DA TERRA	47
7 PROBLEMA DE BRAQUISTRÓCRONA	54
8 PÊNDULO DE NEWTON	61
9 MÁQUINA A VAPOR DE HERON	69
10 ASTROLÁBIO	75
REFERÊNCIAS	83

**Do Passado ao Presente: uma
jornada pelas descobertas
que mudaram a Matemática**



Valdir Menezes Mendonça

APRESENTAÇÃO

O presente caderno pedagógico tem como objetivo fornecer um caderno prático e detalhado para a construção de artefatos matemáticos, que compõem o Museu Matemático. A criação desses artefatos visa promover uma aprendizagem significativa e contextualizada da matemática, unindo teoria e prática em atividades interativas. Cada artefato foi cuidadosamente pensado para conectar os conceitos matemáticos com suas aplicações históricas, oferecendo aos alunos uma experiência de aprendizagem lúdica e crítica.

A proposta do Museu Matemático surge da necessidade de tornar o ensino de matemática mais dinâmico e envolvente, integrando a história da matemática com as práticas pedagógicas do dia a dia. Com base na teoria Histórico Cultural de Lev Vigotski e a teoria do Ensino Desenvolvimental de V. V. Davíдов, este caderno oferece uma abordagem que visa desenvolver o pensamento teórico dos alunos, permitindo que eles compreendam as leis e relações subjacentes aos fenômenos matemáticos. Ao longo da construção dos artefatos, os alunos terão a oportunidade de aplicar conceitos matemáticos de forma prática, colaborativa e contextualizada, ampliando sua compreensão crítica sobre o papel da matemática na sociedade.

Cada artefato aqui apresentado é acompanhado de um passo a passo detalhado de sua construção, bem como uma explicação sobre o conceito matemático envolvido e sua relevância histórica. O Museu Matemático é, portanto, uma ferramenta pedagógica que não apenas ensina matemática, mas também instiga o aluno a explorar, refletir e interagir com o conhecimento, tornando-se protagonista de seu processo de aprendizagem.

Esperamos que este caderno sirva como um guia para professores e alunos no desenvolvimento de atividades interativas, contribuindo para um ensino mais crítico, consciente e integrador da matemática.

Passamos agora à descrição das experiências vivenciadas em sala de aula. A aplicação prática do material desenvolvido constitui uma etapa fundamental desta pesquisa, pois permite compreender como as propostas contidas no caderno ganham vida no ambiente escolar, envolvendo professores e estudantes em processos de investigação e construção coletiva do conhecimento.

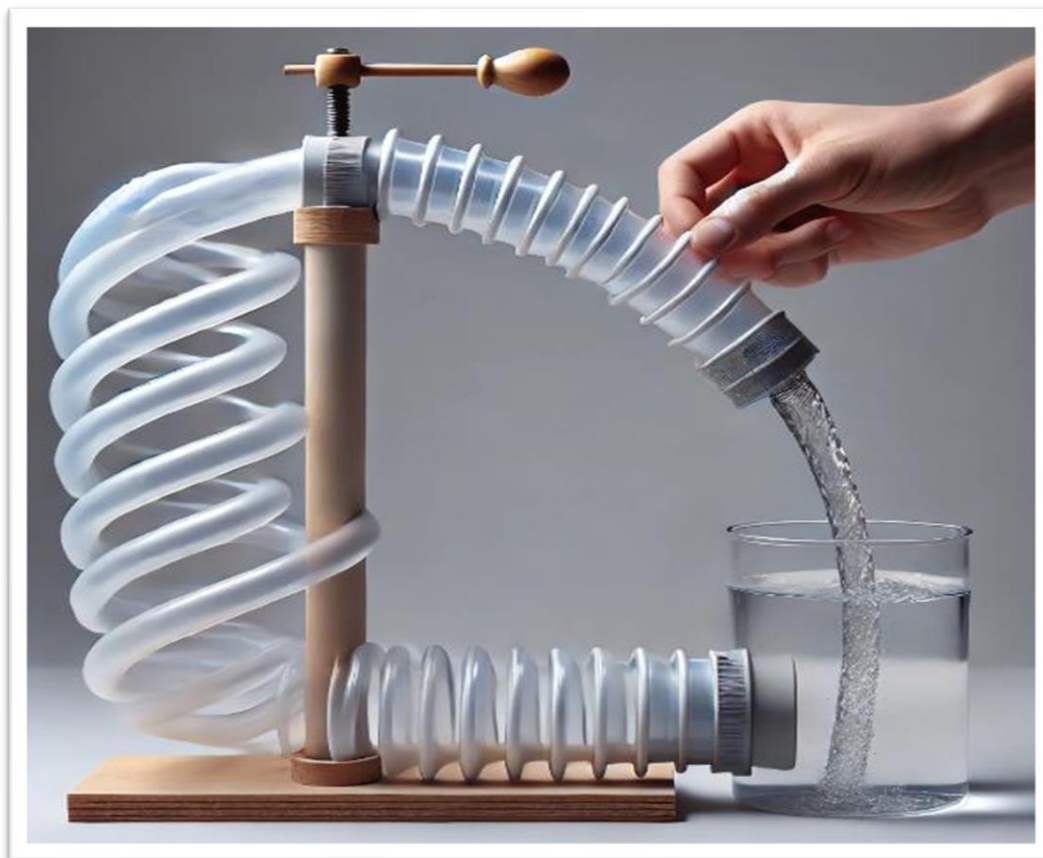
É nesse momento que teoria e prática se entrelaçam de forma concreta, revelando o potencial do Museu Matemático como instrumento mediador do aprendizado e promotor do desenvolvimento do pensamento teórico. As atividades realizadas proporcionaram não apenas à experimentação dos artefatos pedagógicos, mas também a observação das interações, das reflexões e das aprendizagens que emergiram ao longo do percurso formativo.

Nas páginas seguintes, serão apresentados os experimentos didático-formativos conduzidos no âmbito desta pesquisa, detalhando as etapas planejadas, os desafios encontrados e os avanços observados junto aos participantes. Este relato busca oferecer aos educadores e pesquisadores uma visão clara e inspiradora sobre a implementação prática do caderno pedagógico, reforçando sua contribuição para a ressignificação do ensino da matemática.

1PARAFUSO DE ARQUIMEDES

O Parafuso de Arquimedes é um dispositivo que exemplifica a engenhosidade dos antigos gregos ao aplicarem conceitos matemáticos e físicos para solucionar problemas práticos. Tradicionalmente atribuído a Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.), este mecanismo se destacou por sua simplicidade e eficiência, sendo utilizado principalmente para elevar água e outros materiais líquidos ou granulares.

Figura 1 – Bomba de água manual



Fonte: Imagem gerada por Inteligência Artificial, 2024.

Contexto Histórico

Embora associado a Arquimedes, há indícios de que o Parafuso de Arquimedes tenha suas origens em culturas anteriores, como a mesopotâmica e a egípcia. Há relatos de que, durante suas viagens ao Egito, Arquimedes teria observado e refinado tecnologias

similares empregadas na elevação de água do rio Nilo para irrigação agrícola. Seu aprimoramento do dispositivo consolidou seu uso em diversas partes do mundo antigo, especialmente em regiões onde o controle da água era crucial para a sobrevivência.

No Egito, o Parafuso de Arquimedes se tornou uma ferramenta vital para irrigar terras agrícolas em períodos de seca e inundação. Já na Grécia e no Império Romano, o dispositivo encontrou aplicações em mineradoras e na drenagem de locais alagados. O legado de Arquimedes como matemático, engenheiro e inventor foi imortalizado pela eficácia do dispositivo, que continua em uso até hoje em versões adaptadas.

O Funcionamento

O Parafuso de Arquimedes é composto por um tubo helicoidal que pode ser montado em um cilindro ou funcionar de forma independente. Quando inclinado, a extremidade inferior é submersa no líquido, e o movimento de rotação do parafuso faz com que o líquido seja capturado em espaços helicoidais. À medida que o parafuso gira, o líquido é transportado para cima, até alcançar a extremidade superior.

Este princípio simples, mas revolucionário, baseia-se na ideia de que a água, ou outro material, fica aprisionada em "bolsões" criados pelas hélices do parafuso. Cada giro eleva o material progressivamente, dispensando sistemas mais complexos ou mão de obra excessiva.

Do ponto de vista matemático, o Parafuso de Arquimedes pode ser descrito como uma aplicação prática de curvas helicoidais. Arquimedes, conhecido por seu domínio da geometria e mecânica, provavelmente utilizou seu conhecimento em espirais e na relação entre ângulos e superfícies inclinadas para projetar o dispositivo.

A eficiência do Parafuso de Arquimedes também pode ser relacionada à conservação de energia e ao aproveitamento de forças mecânicas. A análise moderna do funcionamento do parafuso considera parâmetros como o ângulo de inclinação, a velocidade de rotação e o coeficiente de atrito, fatores que influenciam a quantidade de material transportado por unidade de tempo.

O Parafuso de Arquimedes transcendeu séculos como um exemplo de tecnologia sustentável. Na antiguidade, ele revolucionou a agricultura e a mineração. Durante o

Renascimento, engenheiros e inventores estudaram sua mecânica para desenvolver novas tecnologias. Hoje, ele é utilizado em estações de tratamento de água e esgoto, bem como em usinas de energia hidráulica, onde hélices semelhantes captam energia do movimento da água.

Além disso, o Parafuso de Arquimedes permanece um recurso didático fundamental, demonstrando princípios básicos de física e mecânica para estudantes de engenharia e ciências. Ele serve como um elo entre o conhecimento histórico e a aplicação tecnológica moderna, destacando a genialidade de Arquimedes e sua contribuição à ciência.

O Parafuso de Arquimedes não é apenas uma invenção prática; ele é uma representação da capacidade humana de integrar matemática e mecânica para solucionar problemas reais. Sua história reflete o poder do conhecimento interdisciplinar e a atemporalidade de conceitos matemáticos, provando que as soluções do passado continuam a influenciar a tecnologia do presente e do futuro.

Experimento Didático-Formativo

Objetivo Geral:

Desenvolver o pensamento teórico dos alunos por meio da compreensão das propriedades geométricas e físicas do Parafuso de Arquimedes, explorando conceitos como volume, geometria helicoidal e transporte de líquidos, além de promover a conexão com aplicações práticas e tecnológicas contemporâneas.

Objetivo Geral:

Desenvolver o pensamento teórico dos alunos por meio da compreensão das propriedades geométricas e físicas do Parafuso de Arquimedes, explorando conceitos como volume, geometria helicoidal e transporte de líquidos, além de promover a conexão com aplicações práticas e tecnológicas contemporâneas.

Ação 1: Transformação dos Dados da Tarefa para Revelar a Relação Universal

Objetivo Específico:

Guiar os estudantes na abstração da relação essencial entre as variáveis envolvidas no funcionamento do Parafuso de Arquimedes, como o volume de água transportado e o ângulo de inclinação do parafuso.

Operações:

1. Análise da tarefa: Introdução do Parafuso de Arquimedes e suas partes. O professor explica como o parafuso é usado para transportar água e apresenta um problema concreto: calcular o volume de água transportado em uma rotação completa do parafuso, considerando seu diâmetro e inclinação.

2. Identificação dos elementos relevantes: Os alunos identificam as variáveis principais (comprimento do parafuso, ângulo de inclinação, diâmetro da hélice, volume de líquido transportado) e discutem as medições necessárias para resolver o problema.

3. Descoberta da relação geral: Com a mediação do professor, os alunos compreendem a relação entre o volume de água, o ângulo de inclinação e a geometria helicoidal do parafuso, percebendo como a forma helicoidal facilita o transporte de líquidos.

4. Criação de um modelo gráfico: Os alunos desenvolvem uma representação visual da relação entre a inclinação do parafuso e o volume de líquido transportado, visualizando como diferentes inclinações influenciam essa capacidade.

Ação 2: Modelação da Relação Universal

Objetivo Específico:

Modelar a relação entre o ângulo de inclinação e o volume de líquido transportado pelo parafuso, permitindo que os alunos representem matematicamente a essência do conceito.

Operações:

1. Modelação gráfica: Os alunos produzem gráficos relacionando o volume transportado com a inclinação do parafuso, discutindo variações em função da inclinação e do comprimento da espiral.

2. Representação simbólica: Formalização da relação em uma equação matemática, permitindo cálculos do volume transportado com base em diferentes parâmetros.

3. Simulação do conceito: Os alunos realizam simulações modificando ângulo e diâmetro do parafuso, observando como essas mudanças afetam o volume transportado.

Ação 3: Transformação do Modelo da Relação Universal

Objetivo Específico:

Explorar as propriedades da relação estudada, investigando como variações nos parâmetros impactam o volume transportado e a eficiência do Parafuso de Arquimedes.

Operações:

1. Aplicação do modelo: Os alunos aplicam o modelo a diferentes configurações do Parafuso de Arquimedes.

2. Análise das propriedades: Estudo de variações extremas de inclinação, refletindo sobre a otimização do dispositivo.

3. Generalização: Relacionar o Parafuso de Arquimedes a outros sistemas de transporte de líquidos, como bombas hidráulicas.

4. Refinamento do modelo: Inclusão de fatores como atrito e resistência do material, aprimorando a compreensão prática.

Ação 4: Construção do Sistema de Tarefas Particulares para Resolver por Procedimento Geral

Objetivo Específico:

Aplicar o modelo generalizado em problemas práticos, consolidando o conhecimento adquirido.

Operações:

1. Criação de novas tarefas: Grupos de alunos elaboram problemas práticos envolvendo o Parafuso de Arquimedes.

2. Resolução das tarefas: Aplicação das fórmulas e procedimentos desenvolvidos.

3. Exploração de variações: Testes com diferentes fluidos e ajustes na hélice.

4. Formalização de um algoritmo: Desenvolvimento de um algoritmo geral para resolver problemas relacionados ao Parafuso de Arquimedes.

Ação 5: Controle sobre o Cumprimento das Ações Anteriores

Objetivo Específico:

Avaliar o progresso dos alunos na compreensão dos conceitos e aplicação dos modelos.

Operações:

1. Verificação das respostas: Revisão coletiva das soluções propostas.

2. Discussão das dificuldades: Reflexão sobre os desafios enfrentados e ajustes necessários.

3. Autoavaliação: Os alunos identificam áreas que precisam de maior atenção.

Ação 6: Avaliação da Assimilação do Procedimento Geral

Objetivo Específico:

Verificar a internalização do procedimento geral pelos alunos e sua aplicação em novos contextos.

Operações:

1. Aplicação em novos contextos: Proposição de desafios inéditos pelo professor.

2. Discussão em grupo: Resolução colaborativa dos novos desafios.

3. Autoavaliação final: Reflexão sobre o processo de aprendizagem.

Conclusão do Experimento:

Ao término deste experimento, os alunos terão compreendido a geometria helicoidal e o funcionamento do Parafuso de Arquimedes, reconhecendo como princípios de volume, inclinação e transporte de líquidos se aplicam a contextos práticos. Essa compreensão ascende do pensamento concreto ao abstrato, consolidando o aprendizado de forma crítica.

Construção do Parafuso de Arquimedes

Objetivo:

Criar uma réplica funcional do Parafuso de Arquimedes, permitindo aos alunos visualizar e compreender a aplicação prática do conceito.

Materiais Necessários:

- Tubo de PVC (diâmetro de 2,5 a 5 cm, comprimento de aproximadamente 1 metro);
- Arame flexível;
- Fita adesiva resistente;
- Tesoura ou cortador de arame;
- Recipiente grande para teste;
- Água;
- Cola forte (opcional);
- Alça ou cabo de madeira;
- Funil (opcional).

Passo a Passo:

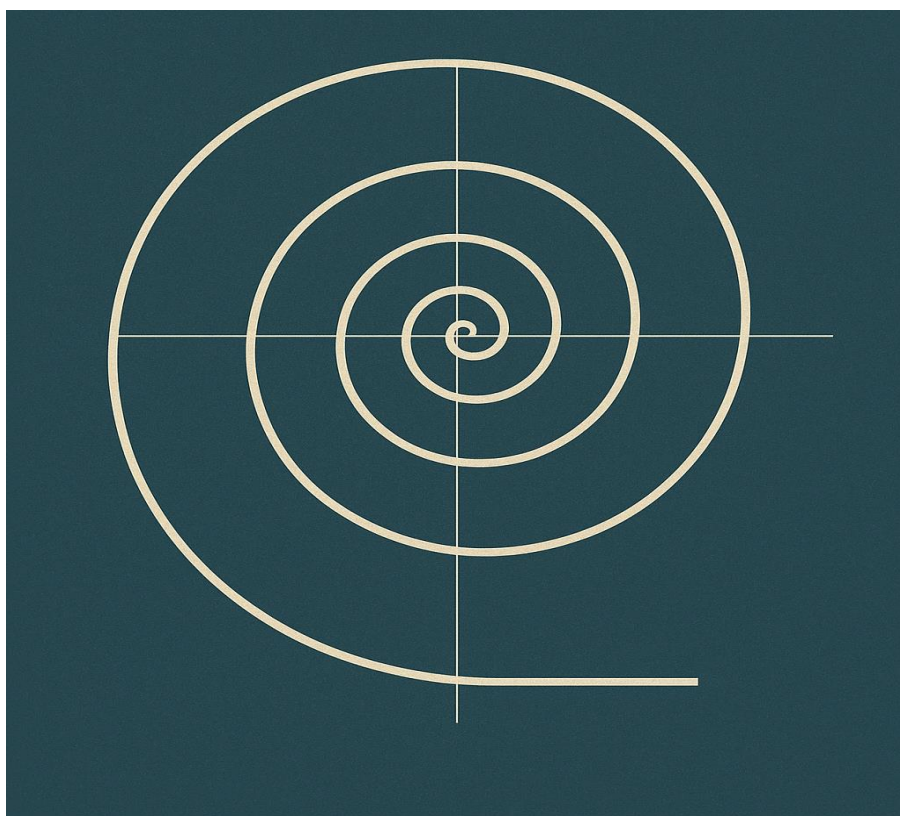
1. Preparação do tubo de PVC como eixo central.
2. Modelagem do arame em espiral uniforme ao redor do tubo.
3. Fixação firme do arame ao tubo com fita adesiva ou cola.
4. Instalação da alça para facilitar a rotação.
5. Teste do dispositivo com água, observando a movimentação do líquido.
6. Verificação do funcionamento sob diferentes ângulos e velocidades.

Ao concluir a construção e os testes, os alunos serão convidados a refletir sobre o processo, conectando a prática aos conceitos matemáticos e físicos, consolidando a compreensão do funcionamento do Parafuso de Arquimedes.

2 ESPIRAL DE ARQUIMEDES

A Espiral de Arquimedes é uma curva plana descrita pela primeira vez por Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.), um dos maiores matemáticos da Antiguidade. Essa espiral, que leva seu nome, foi apresentada no tratado *Sobre as Espirais* (*On Spirals*), no qual Arquimedes explorou suas propriedades e aplicações práticas.

Figura 2 – Espiral de Arquimedes



Fonte: Elaborada pelo autor a partir de imagem gerada por inteligência artificial (DALL·E, 2024)

Contexto Histórico

Arquimedes desenvolveu a espiral como ferramenta para resolver problemas geométricos desafiadores, como a trisseção de ângulos e a quadratura do círculo. Durante sua vida, ele se dedicou profundamente ao estudo das curvas e suas aplicações

na matemática e na mecânica. A Espiral de Arquimedes exemplifica como conceitos abstratos podem ser aplicados na solução de problemas concretos.

Definição Matemática

A Espiral de Arquimedes é o lugar geométrico descrito por um ponto que se move com velocidade constante ao longo de uma linha reta que gira uniformemente em torno de um ponto fixo (o centro).

Propriedades Geométricas

- **Espaçamento Constante:** A distância entre as voltas da espiral é constante, característica que a diferencia de outras espirais, como a logarítmica.
- **Simetria Rotacional:** Mantém padrões regulares em torno do centro.
- **Aplicações em Quadratura e Trissecção:** Arquimedes utilizou a espiral para dividir ângulos e calcular áreas, explorando abordagens inovadoras para sua época.

Aplicações Históricas e Modernas

- **Na Antiguidade:** Utilizada para calcular áreas e resolver problemas de geometria plana, antecipando conceitos do cálculo integral.
- **Na Física e Engenharia:** Empregada no design de antenas helicoidais e mecanismos de precisão.
- **Na Indústria e nas Artes:** Inspira padrões estéticos e soluções técnicas em diversos campos.

Relevância Didática

A Espiral de Arquimedes é uma introdução fundamental ao estudo de coordenadas polares, proporcionando aos estudantes um exemplo claro de como curvas são geradas por movimentos combinados. Ilustra, ainda, conceitos de crescimento linear, periodicidade e aplicação prática de equações polares.

Conclusão

A Espiral de Arquimedes transcende sua definição matemática; ela simboliza a engenhosidade de Arquimedes, que integrou teoria e prática em suas descobertas. Séculos após sua criação, a espiral continua a inspirar matemáticos, engenheiros e artistas, evidenciando a atemporalidade do legado deixado por Arquimedes.

Experimento Didático-Formativo

Objetivo Geral:

Desenvolver o pensamento teórico dos alunos por meio da compreensão da geometria da Espiral de Arquimedes, suas propriedades e aplicações, envolvendo cálculo de comprimento e área da espiral.

Ação 1: Transformação dos Dados da Tarefa para Revelar a Relação Universal

Objetivo Específico:

Guiar os alunos na abstração da relação entre variáveis da espiral, como raio e ângulo, e suas implicações geométricas.

Operações:

1. Introdução à Espiral de Arquimedes e suas propriedades. Os alunos observam a geração da espiral por modelo gráfico.
2. Identificação das variáveis: raio inicial, taxa de crescimento do raio por revolução e número de voltas.
3. Descoberta da relação geral entre comprimento da espiral e número de voltas, introduzindo ângulos em coordenadas polares.
4. Criação de modelo gráfico ou digital para visualizar a influência do raio e do ângulo de rotação no crescimento da espiral.

Ação 2: Modelação da Relação Universal

Objetivo Específico:

Modelar matematicamente a relação entre o raio, o ângulo e o comprimento da espiral.

Operações:

1. Criação de gráficos relacionando comprimento da espiral e número de voltas.

2. Representação simbólica da relação matemática entre variáveis.
3. Simulação prática ou computacional, utilizando softwares de geometria dinâmica.

Ação 3: Transformação do Modelo para Estudo das Propriedades

Objetivo Específico:

Investigar como variações nos parâmetros impactam o comprimento e a área da espiral.

Operações:

1. Aplicação do modelo para diferentes valores de crescimento do raio e número de voltas.
2. Análise das propriedades do modelo, refletindo sobre as diferenças em relação a outras formas geométricas.
3. Generalização para outras espirais, como a logarítmica.
4. Refinamento do modelo, considerando diferentes proporções entre raio e ângulo de rotação.

Ação 4: Construção do Sistema de Tarefas Particulares

Objetivo Específico:

Aplicar o modelo generalizado em problemas práticos.

Operações:

1. Criação de problemas que envolvam cálculo do comprimento e da área da espiral.
2. Resolução utilizando as fórmulas desenvolvidas.
3. Exploração de variações e limites do modelo.
4. Formalização de um algoritmo para resolução geral de problemas com espirais.

Ação 5: Controle sobre as Ações Anteriores

Objetivo Específico:

Avaliar a compreensão e aplicação dos modelos desenvolvidos.

Operações:

1. Revisão coletiva das respostas.

2. Discussão das dificuldades e possíveis melhorias.
3. Autoavaliação dos estudantes sobre sua compreensão do conteúdo.

Ação 6: Avaliação da Assimilação do Procedimento Geral

Objetivo Específico:

Verificar a internalização do procedimento geral pelos alunos e sua aplicação em novos contextos.

Operações:

1. Apresentação de novos desafios envolvendo espirais.
2. Discussão colaborativa das soluções.
3. Autoavaliação final, refletindo sobre a aprendizagem e a generalização do conceito.

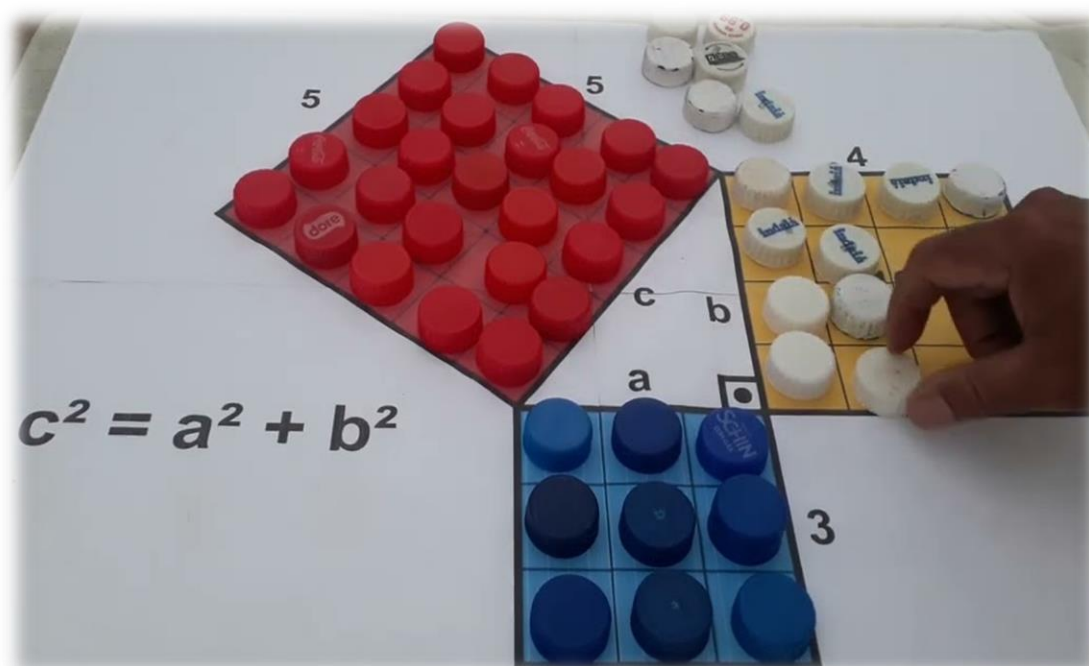
Considerações do Experimento

Ao final deste experimento, os alunos deverão ser capazes de compreender profundamente a geometria da Espiral de Arquimedes, aplicando o modelo desenvolvido para calcular seu comprimento e área em diferentes contextos, reconhecendo suas aplicações práticas e valor matemático.

3 TEOREMA DE PITÁGORAS

O Teorema de Pitágoras é um dos resultados mais importantes e conhecidos da matemática, essencial no estudo da geometria. Ele relaciona os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo e é atribuído ao filósofo e matemático grego Pitágoras (aproximadamente 570 a.C. – 495 a.C.). No entanto, há evidências de que o teorema já era conhecido e utilizado por civilizações anteriores, como os babilônios e os egípcios.

Figura 3- Representação do Teorema de Pitágoras com material concreto



Fonte: Elaborada pelo pesquisador (2024).

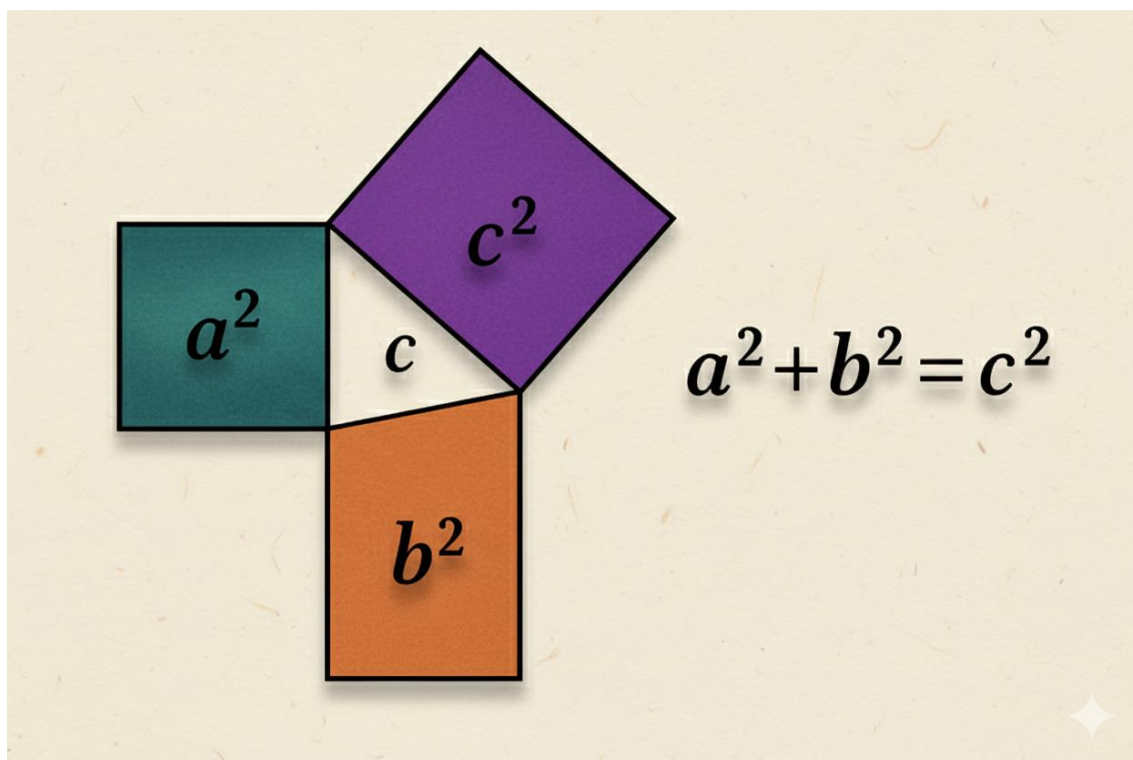
O Enunciado

O teorema afirma que:

Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Matematicamente, para um triângulo retângulo com hipotenusa **c** e catetos **a** e **b**, temos: **$a^2 + b^2 = c^2$** .

Figura 4: Demonstração Geométrica do Teorema de Pitágoras



Fonte: Elaborada pelo autor a partir de imagem gerada por inteligência artificial (DALL·E, 2024).

História

- **Antes de Pitágoras:** Tábuas babilônicas, como a Plimpton 322 (c. 1900 a.C.), já apresentavam trios pitagóricos — números inteiros que satisfazem a relação $a^2 + b^2 = c^2$. Os egípcios utilizavam "cordas de 12 nós" para formar triângulos na proporção 3:4:5.
- **Pitágoras e seus discípulos:** Embora conhecido antes, acredita-se que Pitágoras ou seus seguidores tenham sido os primeiros a demonstrar formalmente o teorema. A escola pitagórica valorizava as relações entre números e formas, destacando a harmonia geométrica.
- **Índia e China:** Textos como o *Sulba Sutras* (c. 800 a.C.) e o *Chou Pei Suan Ching* (c. 500 a.C.) também contêm referências ao teorema.

Demonstrações

Há mais de 400 demonstrações conhecidas para o Teorema de Pitágoras, incluindo:

1. **Demonstração geométrica clássica:** Usando áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo.
2. **Demonstração algébrica:** Reorganização das áreas para mostrar a relação entre os lados.
3. **Demonstração de Bhaskara:** Baseada no rearranjo de figuras geométricas, famosa por sua simplicidade.
4. **Triângulos semelhantes:** Utilizando a semelhança dos triângulos formados pela altura da hipotenusa.

Aplicações

- **Geometria e Trigonometria:** Cálculo de distâncias, diagonais, e base para fórmulas trigonométricas.
- **Ciências Naturais:** Determinação de deslocamentos e trajetórias em física; cálculo de distâncias astronômicas.
- **Engenharia e Construção:** Definição de comprimentos e ângulos em projetos estruturais.
- **Tecnologia:** Aplicações em computação gráfica, algoritmos de IA e análise de dados.
- **Navegação:** Essencial para geolocalização e sistemas GPS.

A Beleza do Teorema

Mais do que uma fórmula, o Teorema de Pitágoras representa como a abstração matemática contribui para a compreensão do mundo. Sua universalidade conecta culturas e épocas.

Conclusão

O Teorema de Pitágoras é um marco do pensamento matemático, atravessando civilizações e permanecendo fundamental para o ensino e a prática da matemática, até os dias atuais.

Experimento Didático-Formativo

Objetivo Geral:

Desenvolver o pensamento teórico dos alunos por meio da compreensão do Teorema de Pitágoras, suas demonstrações e aplicações práticas.

Ação 1: Transformação dos Dados da Tarefa para Revelar a Relação Universal

Objetivo Específico:

Guiar os alunos na abstração da relação entre os lados do triângulo retângulo.

Operações:

1. Introdução ao Teorema de Pitágoras, com desenho de triângulo no quadro.
2. Identificação das variáveis essenciais: catetos **a**, **b** e hipotenusa **c**.
3. Descoberta da relação $a^2 + b^2 = c^2$, com mediação do professor.
4. Criação de modelo gráfico para visualizar e calcular áreas.

Ação 2: Modelação da Relação Universal

Objetivo Específico:

Modelar a relação entre os lados e as áreas dos quadrados associados.

Operações:

1. Modelação gráfica de diferentes triângulos retângulos.
2. Representação simbólica e aplicação da equação em vários exemplos.
3. Simulação prática ou digital do teorema.

Ação 3: Transformação do Modelo para Estudo das Propriedades

Objetivo Específico:

Explorar as propriedades do teorema e suas variações.

Operações:

1. Aplicação do teorema em problemas reais, como cálculos de rampas ou diagonais.
2. Análise de triângulos com diferentes proporções.
3. Generalização para contextos tridimensionais.
4. Refinamento do modelo, explorando diferentes demonstrações.

Ação 4: Construção do Sistema de Tarefas Particulares

Objetivo Específico:

Aplicar o teorema em problemas práticos e teóricos.

Operações:

1. Criação de problemas por parte dos grupos de alunos.
2. Resolução utilizando o teorema e os procedimentos aprendidos.
3. Exploração de variações nas condições das tarefas.
4. Desenvolvimento de algoritmo geral para resolução de problemas com triângulos retângulos.

Ação 5: Controle sobre as Ações Anteriores

Objetivo Específico:

Verificar a compreensão e domínio do teorema pelos alunos.

Operações:

1. Revisão das respostas e dos procedimentos aplicados.
2. Discussão sobre as dificuldades encontradas.
3. Autoavaliação da aprendizagem.

Ação 6: Avaliação da Assimilação do Procedimento Geral

Objetivo Específico:

Certificar que os alunos internalizaram o procedimento e aplicam o teorema em novos contextos.

Operações:

1. Resolução de problemas inéditos, incluindo situações tridimensionais.
2. Discussão em grupo sobre as novas soluções encontradas.
3. Autoavaliação final dos grupos sobre o aprendizado do conceito.

Conclusão do Experimento

Ao final, os estudantes terão internalizado o conceito do triângulo retângulo e a relação entre seus lados, aplicando o Teorema de Pitágoras em diferentes contextos. O experimento favorece a transição do pensamento concreto ao abstrato, consolidando o aprendizado por meio de provas, aplicações e simulações.

Construção do Artefato: Teorema de Pitágoras

Objetivo:

Construir um modelo visual e prático para ilustrar o Teorema de Pitágoras, utilizando tampinhas para representar as áreas dos quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo.

Materiais Necessários:

- Tampinhas de diferentes cores
- Cartolina ou papelão
- Régua, lápis e tesoura
- Cola e fita adesiva (opcional)
- Transferidor
- Marcadores coloridos (opcional)

Passo a Passo:**1. Desenho do Triângulo:**

Desenhar um triângulo retângulo na cartolina, garantindo o ângulo reto com o transferidor.

2. Desenho dos Quadrados:

Construir os quadrados sobre cada lado do triângulo, respeitando as medidas dos lados.

3. Organização das Tampinhas:

Preencher os quadrados com tampinhas coloridas, criando uma visualização clara das áreas.

4. Colagem das Tampinhas:

Fixar as tampinhas nas áreas correspondentes para representar as áreas dos quadrados.

5. Escrita da Fórmula:

Registrar a fórmula $c^2 = a^2 + b^2$ abaixo do modelo.

6. Explicação Visual:

Observar como a quantidade de tampinhas nos quadrados dos catetos corresponde à quantidade do quadrado da hipotenusa.

Explicação Pedagógica:

Este artefato oferece uma representação concreta da relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo, facilitando a compreensão visual e prática do Teorema de Pitágoras.

4 ROLDANA SIMPLES E COMPOSTA DE ARQUIMEDES

A roldana composta, atribuída a Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.), é um exemplo da genialidade do matemático e inventor grego em aplicar princípios físicos para resolver problemas práticos. Baseado em fundamentos da mecânica, esse sistema foi projetado para multiplicar a força humana, facilitando a elevação de objetos pesados com menor esforço.

Figura 5 – Roldanas de Arquimedes



Fonte: Elaborada pelo autor a partir de imagem gerada por inteligência artificial (DALL·E, 2024).

A Roldana Composta: Um Avanço na Mecânica Antiga

A roldana composta, atribuída a Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.), é um exemplo da genialidade do matemático e inventor grego em aplicar princípios físicos para resolver problemas práticos. Baseado em fundamentos da mecânica, esse sistema foi projetado para multiplicar a força humana, facilitando a elevação de objetos pesados com menor esforço.

Contexto Histórico

Arquimedes, renomado por suas contribuições à matemática, geometria e engenharia, viveu em um tempo em que os mecanismos eram essenciais na construção

civil e nas atividades militares. Embora polias simples já fossem conhecidas, ele foi o primeiro a sistematizar seu uso e criar sistemas compostos que aumentavam significativamente a eficiência mecânica.

A famosa frase atribuída a Arquimedes — *"Dê-me um ponto de apoio e moverei o mundo."* — resume o princípio que fundamenta a roldana composta: o uso da alavancagem mecânica.

Funcionamento

A roldana composta combina polias fixas e móveis para reduzir a força necessária ao levantamento de uma carga. O princípio da vantagem mecânica afirma que a força aplicada é inversamente proporcional ao número de cordas que sustentam a carga.

Componentes básicos:

1. **Polias fixas:** Alteram a direção da força aplicada.
2. **Polias móveis:** Reduzem a força necessária, dividindo o peso da carga.

Funcionamento matemático:

Em uma roldana composta com n cordas sustentando a carga, a força necessária é reduzida para F/n , sendo F o peso da carga. Ou seja, ao aumentar o número de polias móveis, o esforço necessário diminui proporcionalmente.

Aplicações Históricas

- **Construção:** Movimentação de grandes blocos de pedra.
- **Defesa militar:** Manipulação de armas de cerco e movimentação de embarcações durante o cerco de Siracusa.
- **Transporte:** Facilitou operações de carga e descarga no comércio marítimo.

Relevância na Física e Engenharia

- **Eficiência mecânica:** Redução da força com aumento da distância percorrida pela corda, evidenciando a conservação da energia.
- **Modernidade:** Ainda hoje utilizada em guindastes, elevadores e equipamentos de içamento.
- **Ensino de física:** Ilustra conceitos como vantagem mecânica, força, trabalho e conservação de energia.

Legado de Arquimedes

Seu trabalho com máquinas simples demonstra a aplicação prática de conceitos matemáticos abstratos, antecipando princípios da mecânica formalizados séculos depois por Galileu e Newton.

Conclusão

A roldana composta de Arquimedes foi um marco na ciência e na tecnologia, reduzindo o esforço físico em uma época de recursos limitados e inaugurando novas possibilidades na engenharia mecânica. Sua combinação de simplicidade e eficiência segue inspirando gerações.

Experimento Didático-Formativo

Objetivo Geral:

Desenvolver o pensamento teórico dos alunos por meio da compreensão do funcionamento de máquinas simples, como a roldana composta, explorando os conceitos de força, trabalho, proporção e eficiência mecânica.

Construção da Roldana Composta

Materiais Necessários:

- Dois ou mais carretéis ou roldanas
- Corda ou barbante resistente
- Suporte robusto para fixação das roldanas
- Peso ou objeto pesado

- Tesoura
- Ganchos de metal (opcional)
- Cola ou fita adesiva (opcional)

Passo a Passo:

1. Fixar as roldanas:

Instale uma roldana fixa no suporte superior e outra, móvel, ligada ao peso.

2. Passar a corda:

Passe a corda pela roldana fixa e depois pela móvel, amarrando a extremidade a um ponto fixo no suporte.

3. Fixar o peso:

Prenda o peso à roldana móvel. Ao puxar a corda, observe a redução do esforço necessário para levantar a carga.

4. Operação da roldana composta:

Ao operar, os alunos perceberão que a força necessária é reduzida, embora a distância que a corda precisa percorrer seja maior.

Explicação Pedagógica:

- **Roldana simples:** Reduz a força necessária, aumentando a distância percorrida pela corda.
- **Roldana composta:** Multiplica a vantagem da roldana simples, reduzindo ainda mais a força necessária, mas aumentando a distância total de tração.

Ambos os sistemas ilustram o conceito de vantagem mecânica e são excelentes recursos para entender os princípios físicos aplicados por Arquimedes.

Ações do Experimento Didático-Formativo

Ação 1: Transformação dos dados da tarefa para revelar a relação universal

Objetivo Específico:

Compreender a relação entre força aplicada, força obtida e número de roldanas no sistema.

Operações:

- Introdução conceitual e histórica da roldana composta.
- Identificação das variáveis essenciais (força aplicada, força obtida, número de roldanas).
- Descoberta da relação inversa entre força aplicada e número de roldanas.
- Criação de modelos gráficos ou esquemáticos do sistema.

Ação 2: Modelação da relação universal**Objetivo Específico:**

Representar matematicamente a relação força/número de roldanas.

Operações:

- Construção de gráficos que relacionem força aplicada e força obtida.
- Representação simbólica da equação matemática do sistema.
- Simulações variando o número de roldanas para observar os efeitos.

Ação 3: Transformação do modelo para estudo de suas propriedades**Objetivo Específico:**

Investigar o comportamento do modelo em diferentes condições.

Operações:

- Aplicação do modelo em problemas reais.
- Análise de variações extremas (muitas ou poucas roldanas).
- Generalização para outros sistemas mecânicos (guindastes, elevadores).
- Refinamento do modelo considerando fatores como atrito e elasticidade.

Ação 4: Construção do sistema de tarefas particulares

Objetivo Específico:

Aplicar o modelo em problemas práticos diversos.

Operações:

- Criação de problemas práticos com diferentes cargas e alturas.
- Resolução aplicando o modelo matemático da relação força/número de roldanas.
- Exploração de variações nas condições das tarefas.
- Desenvolvimento de algoritmo geral para resolução de problemas com roldanas.

Ação 5: Controle sobre as ações anteriores**Objetivo Específico:**

Avaliar a compreensão dos estudantes sobre a relação força/número de roldanas.

Operações:

- Revisão das soluções e modelos aplicados.
- Discussão sobre dificuldades enfrentadas.
- Autoavaliação do aprendizado pelo grupo.

Ação 6: Avaliação da assimilação do procedimento geral**Objetivo Específico:**

Certificar a internalização do procedimento e sua aplicação em novos contextos.

Operações:

- Aplicação em desafios adicionais com outras máquinas simples.
- Discussão em grupo sobre adaptações do modelo.
- Autoavaliação final dos aprendizados e aplicações práticas.

Considerações do Experimento

Ao final, espera-se que os estudantes tenham internalizado o conceito de vantagem mecânica e compreendam como a roldana composta reduz o esforço físico em

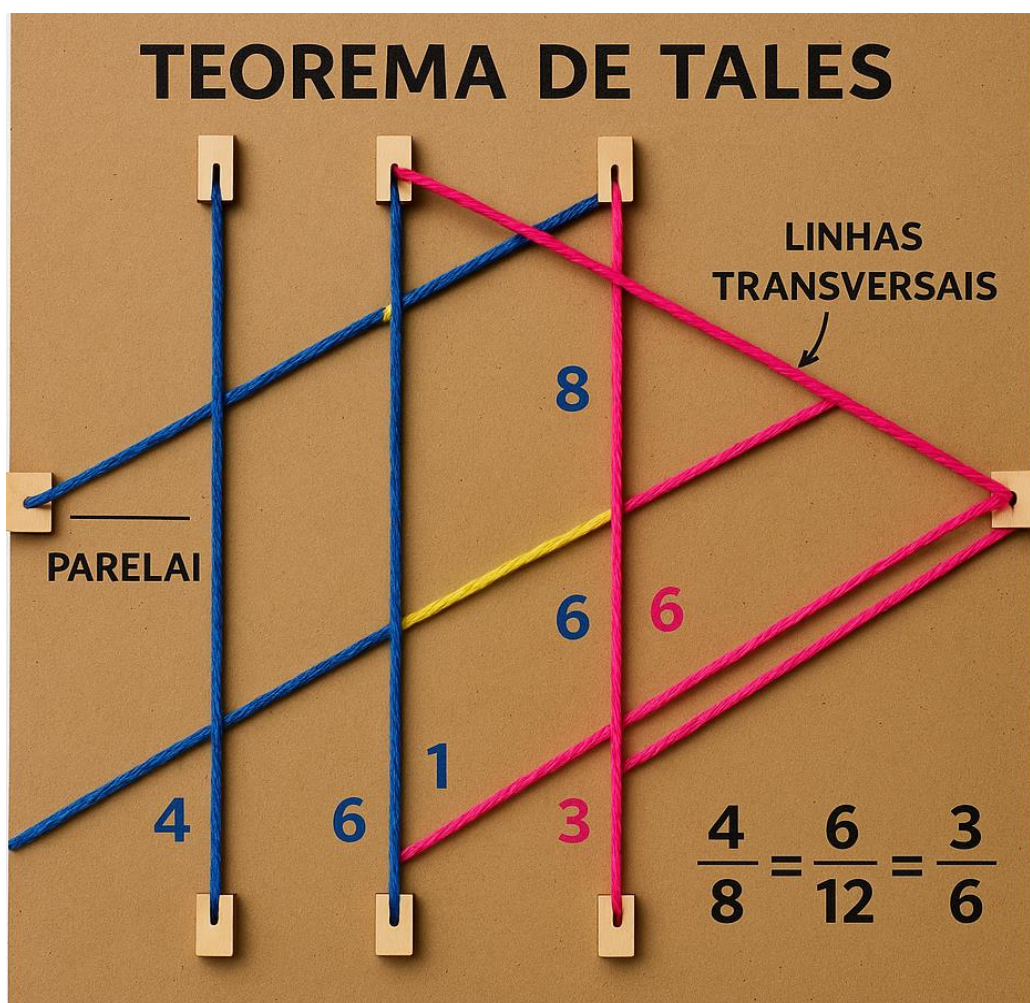
sistemas de levantamento de carga. Este experimento promove a transição do pensamento concreto ao abstrato, consolidando a aprendizagem por meio da modelagem matemática e da experimentação prática.

5 TEOREMA DE TALES

Tales de Mileto, um dos Sete Sábios da Grécia, é considerado o fundador da geometria grega e da filosofia ocidental. Viveu em Mileto, na Ásia Menor (atual Turquia). Teria estudado na Babilônia e no Egito, onde aprendeu e adaptou conceitos geométricos, transformando-os em princípios sistemáticos.

Segundo relatos, Tales utilizou seu teorema para medir a altura das pirâmides e a distância de navios em alto-mar, utilizando apenas sombras e relações proporcionais. Esses feitos evidenciam não só seu domínio da matemática prática, mas também sua habilidade em conectar teoria e aplicação.

Figura 6 - Ilustração Didática do Teorema de Tales



Fonte: Elaborada pelo autor a partir de imagem gerada por inteligência artificial (DALL·E, 2024).

Demonstrações

O Teorema de Tales pode ser demonstrado por meio de conceitos básicos de geometria:

1. Proporcionalidade das Paralelas:

Pela semelhança de triângulos: quando retas paralelas cortam duas transversais, formam-se triângulos semelhantes. A proporcionalidade decorre da igualdade das razões entre lados correspondentes.

2. Triângulo Retângulo no Semicírculo:

Sabendo que o ângulo central de um círculo mede 180° , qualquer ângulo inscrito que intercepte o diâmetro será de 90° , garantindo a formação de um triângulo retângulo.

Aplicações

- **Medição de Alturas e Distâncias:**

Tales utilizou relações de proporcionalidade para determinar a altura das pirâmides egípcias, comparando a sombra da pirâmide com a de um objeto de altura conhecida.

- **Construções Arquitetônicas:**

Proporções são fundamentais para garantir que elementos estruturais sejam dimensionados corretamente.

- **Astronomia:**

O princípio de proporcionalidade é aplicado para medir distâncias entre corpos celestes e prever eclipses.

- **Ensino de Geometria:**

Introduz noções de semelhança, proporcionalidade e propriedades dos triângulos.

Relevância Didática

O Teorema de Tales é uma ferramenta poderosa no ensino da matemática, facilitando a compreensão das relações proporcionais e da semelhança de triângulos. Aplicações práticas, como medir alturas inacessíveis utilizando sombras e réguas, tornam a geometria concreta e atraente para os estudantes.

Conclusão

O Teorema de Tales é um exemplo notável de como conceitos geométricos simples podem resolver problemas práticos e esclarecer as relações fundamentais no espaço. Sua permanência e utilidade, desde a Antiguidade até hoje, demonstram a força do pensamento lógico em conectar teoria e prática.

Experimento Didático-Formativo

Objetivo Geral:

Desenvolver o pensamento teórico dos alunos por meio da compreensão do Teorema de Tales e suas aplicações em semelhança de triângulos, proporções e relações geométricas.

Ação 1: Transformação dos dados da tarefa para revelar a relação universal

Objetivo Específico:

Guiar os estudantes na abstração da relação proporcional entre segmentos de retas e triângulos semelhantes.

Operações:

1. Apresentação de problema prático usando sombras para calcular a altura de objetos.
2. Identificação das variáveis principais: altura, comprimento das sombras e proporções.
3. Descoberta da relação constante entre altura e sombra sob a mesma fonte de luz.
4. Criação de modelo gráfico com triângulos semelhantes para visualizar a proporcionalidade.

Ação 2: Modelação da relação universal

Objetivo Específico:

Modelar a relação entre os lados dos triângulos semelhantes, formalizando o Teorema de Tales.

Operações:

1. Modelação gráfica dos triângulos semelhantes e identificação das proporções entre os lados.
2. Formalização da relação em proporções matemáticas.
3. Simulações aplicando a proporcionalidade a diversos problemas práticos.

Ação 3: Transformação do modelo para estudo de suas propriedades**Objetivo Específico:**

Explorar as propriedades do Teorema de Tales e sua aplicação em diferentes problemas.

Operações:

1. Aplicação prática do Teorema de Tales para resolver problemas de distâncias e alturas inacessíveis.
2. Análise de variações no problema, como diferentes fontes de luz.
3. Generalização do uso do teorema em outras áreas da matemática.
4. Refinamento do modelo para incluir figuras mais complexas e tridimensionais.

Ação 4: Construção do sistema de tarefas particulares**Objetivo Específico:**

Aplicar o Teorema de Tales em diferentes problemas, consolidando o aprendizado.

Operações:

1. Criação de problemas práticos, como medir a largura de um rio ou a altura de um edifício.
2. Resolução das tarefas usando as proporções de semelhança.
3. Exploração de variações nas dimensões dos triângulos.

4. Desenvolvimento de um algoritmo geral para resolver problemas com o Teorema de Tales.

Ação 5: Controle sobre as ações anteriores

Objetivo Específico:

Avaliar o progresso dos alunos na compreensão das proporções geométricas.

Operações:

1. Verificação das soluções e consistência das proporções aplicadas.
2. Discussão sobre dificuldades encontradas e como foram superadas.
3. Autoavaliação da compreensão do teorema.

Ação 6: Avaliação da assimilação do procedimento geral

Objetivo Específico:

Verificar a internalização do Teorema de Tales e sua aplicação autônoma.

Operações:

1. Apresentação de novos desafios geométricos para aplicação do teorema.
2. Discussão em grupo sobre aplicação em contextos mais complexos.
3. Autoavaliação final, destacando a evolução da compreensão do conceito.

Conclusão do Experimento

O objetivo final deste experimento é que os alunos compreendam profundamente a proporcionalidade geométrica, reconhecendo sua aplicabilidade em várias situações. Trabalhando com semelhança de triângulos e proporções, consolidam o conhecimento de forma crítica e autônoma, aplicando o Teorema de Tales em contextos diversos.

Este experimento segue a proposta de ascensão do concreto ao abstrato e retorno ao concreto, conforme a abordagem de Davídov, promovendo a internalização do conceito e sua aplicação prática.

Construção do Artefato: Teorema de Tales

Objetivo:

Demonstrar o Teorema de Tales por meio de um artefato que ilustre a relação proporcional entre segmentos formados por linhas paralelas e transversais.

Materiais Necessários:

- Régua e compasso
- Barbantes ou fios (para linhas paralelas e transversais)
- Cartolina ou papelão grande
- Tesoura
- Cola
- Marcadores coloridos
- Transferidor
- Fita métrica ou régua grande

Passo a Passo:

1. Desenhar as linhas paralelas:

Trace duas ou três linhas paralelas na cartolina.

2. Desenhar as linhas transversais:

Trace duas linhas transversais cruzando as paralelas em ângulo visível.

3. Medir e marcar os segmentos:

Meça os segmentos formados pelas interseções e anote suas medidas.

4. Adição dos barbantes:

Cole barbantes sobre as linhas, usando cores diferentes para paralelas e transversais.

5. Relação proporcional:

Mostre que os segmentos nas transversais são proporcionais.

6. Escrever a fórmula:

Registre a relação proporcional do Teorema de Tales no artefato.

7. Finalização:

Verifique que a representação visual esteja clara para demonstrar o teorema.

Explicação Pedagógica:

Este artefato permite uma visualização prática do Teorema de Tales, tornando mais acessível a compreensão da proporcionalidade entre segmentos formados por linhas paralelas e transversais. É um recurso eficiente para conectar teoria e prática no ensino da geometria.

6 O CÁLCULO DO RAIO DA TERRA

O cálculo do raio da Terra, realizado por Eratóstenes de Cirene (276 a.C. – 194 a.C.), é um dos maiores marcos da ciência antiga. Matemático, astrônomo e bibliotecário da famosa Biblioteca de Alexandria, Eratóstenes, com observações simples e aplicação da geometria, conseguiu estimar com notável precisão o tamanho do nosso planeta.

Naquela época, os gregos já aceitavam a esfericidade da Terra, baseada em observações astronômicas e argumentos filosóficos. O desafio era determinar o tamanho desta esfera.

Figura 7: Atividade experimental desenvolvida com estudantes



Fonte: Produção do pesquisador (2024).

Eratóstenes soube de um fenômeno curioso na cidade de Siena (atual Assuã, Egito): ao meio-dia do solstício de verão, os raios solares atingiam o fundo de um poço verticalmente, indicando que o Sol estava no zênite. Já em Alexandria, na mesma data e horário, os objetos ainda projetavam sombras, revelando que o Sol não estava diretamente acima. Essa diferença de inclinação foi o ponto de partida para seu cálculo.

O Método de Eratóstenes

Eratóstenes seguiu estes passos:

1. Medida do Ângulo Solar em Alexandria:

Mediu o ângulo da sombra projetada por um obelisco, calculando cerca de $7,2^\circ$.

2. Geometria Esférica:

Compreendeu que o ângulo medido correspondia ao arco entre Alexandria e Siena na superfície da Terra.

3. Distância entre Alexandria e Siena:

Estimou-se a distância em **5.000 estádios** (cerca de 157,5 metros cada).

4. Cálculo da Circunferência:

Sabendo que $7,2^\circ$ corresponde a $1/50$ da circunferência total (pois $7,2^\circ \times 50 = 360^\circ$), multiplicou a distância entre as cidades por 50, obtendo 250.000 estádios (aproximadamente 39.375 km).

5. Cálculo do Raio da Terra:

Usando $C = 2\pi r$, estimou o raio em aproximadamente 6.262 km, muito próximo do valor atual: cerca de 6.371 km.

A Precisão de Eratóstenes

Para os recursos da época, o cálculo foi extraordinariamente preciso. A maior margem de erro estava na distância entre as cidades, baseada em medições por caravanas, não por instrumentos geodésicos.

Impacto e Relevância

- **Geografia:**

Fundamentou o desenvolvimento da cartografia científica.

- **Legado Científico:**

Demonstrou o uso da observação e da matemática para entender fenômenos naturais em grande escala.

- **Educação Matemática:**

É um exemplo didático clássico para ensinar geometria esférica e proporção.

- **Exploração:**

Influenciou avanços na navegação marítima e na compreensão das dimensões da Terra.

Conclusão

O trabalho de Eratóstenes é uma prova brilhante de como a observação atenta e a aplicação lógica podem transcender limitações tecnológicas. Seu método e resultados continuam a inspirar cientistas e educadores, demonstrando a força da curiosidade e da engenhosidade humanas.

Experimento Didático-Formativo

Objetivo Geral:

Desenvolver o pensamento teórico dos alunos, compreendendo os métodos geométricos utilizados para calcular o raio da Terra, explorando conceitos de geometria esférica, proporções e trigonometria.

Ação 1: Transformação dos dados da tarefa

Objetivo Específico:

Compreender a relação entre a medida da circunferência da Terra e o ângulo de observação.

Operações:

- Apresentação do problema histórico.
- Identificação das variáveis: distância entre cidades, ângulo do sol, altura dos objetos.
- Descoberta da relação proporcional entre ângulo da sombra e distância na superfície terrestre.

- Criação de modelo gráfico representando a relação.

Ação 2: Modelação da relação universal

Objetivo Específico:

Modelar graficamente e simbolicamente a relação entre o ângulo de observação e a circunferência da Terra.

Operações:

- Modelação gráfica da Terra e dos ângulos de sombra.
- Formalização da relação proporcional em equações.
- Simulação de diferentes valores de distância e ângulos.

Ação 3: Estudo das propriedades do modelo

Objetivo Específico:

Explorar como variações de ângulos e distâncias impactam o cálculo do raio.

Operações:

- Aplicação prática do modelo em diferentes cenários.
- Análise das variações do modelo em casos extremos.
- Generalização do modelo para outros corpos celestes.
- Refinamento do modelo considerando altura do observador e curvatura atmosférica.

Ação 4: Sistema de tarefas particulares

Objetivo Específico:

Aplicar o modelo em problemas práticos variados.

Operações:

- Criação de novos problemas sobre circunferências de outros corpos esféricos.
- Resolução das tarefas aplicando o modelo geral.
- Exploração de variações de parâmetros.
- Desenvolvimento de algoritmo geral para cálculo do raio.

Ação 5: Controle sobre as ações anteriores

Objetivo Específico:

Avaliar a compreensão dos estudantes.

Operações:

- Verificação das soluções.
- Discussão das dificuldades encontradas.
- Autoavaliação da aprendizagem.

Ação 6: Avaliação da assimilação do procedimento geral

Objetivo Específico:

Confirmar a internalização do procedimento.

Operações:

- Aplicação do conceito em novos contextos.
- Discussão em grupo sobre adaptações do modelo.
- Autoavaliação final, refletindo sobre a importância do experimento.

Considerações do Experimento

Este experimento propicia aos alunos uma compreensão profunda dos conceitos de geometria esférica e proporção, seguindo a abordagem de Dávidov para ascensão do concreto ao abstrato e retorno ao concreto. Os alunos internalizam a teoria ao aplicar o método de Eratóstenes, compreendendo não apenas o cálculo em si, mas também sua relevância histórica e científica.

Construção do Artefato: Método de Eratóstenes

Objetivo:

Construir um modelo visual e prático que simule o método de Eratóstenes para calcular o raio da Terra.

Materiais Necessários:

- Dois postes ou bastões iguais
- Base de papelão ou madeira
- Lanterna ou lâmpada
- Transferidor
- Barbante ou régua
- Cola ou fita adesiva

Passo a Passo:

1. Montagem dos dois postes:

Fixe-os na base, representando as cidades de Siena e Alexandria.

2. Simulação da luz solar:

Posicione a lanterna de modo que sua luz represente os raios solares.

3. Medida das sombras:

Incline a luz para que um poste não projete sombra e o outro, sim.

4. Medida do ângulo:

Use o transferidor para medir o ângulo da sombra.

5. Medida da distância:

Meça a distância entre os dois postes.

6. Cálculo:

Aplique a fórmula da proporção:

$$\frac{\text{circunferência da Terra}}{\text{distância entre as cidades}} = \frac{360^\circ}{\text{ângulo medido}}$$

Calcule o raio da Terra a partir da circunferência.

7. **Explicação:**

Explique como Eratóstenes usou esses princípios para realizar seu cálculo.

Explicação Pedagógica:

Este artefato proporciona uma vivência prática de geometria esférica, reforçando conceitos de proporção e observação científica aplicada à compreensão do mundo real.

7 PROBLEMA DE BRAQUISTÓCRONA

O problema da braquistócrona é um clássico da matemática e da física. Seu nome vem do grego *brachistos* (o mais curto) e *chronos* (tempo). A questão consiste em determinar a curva pela qual uma partícula, sob a ação da gravidade e sem atrito, se deslocaria de um ponto a outro no menor tempo possível. Surpreendentemente, a trajetória mais curta em distância, que seria a linha reta, não é a resposta correta. A solução é uma curva chamada cicloide.

Figura 8: Um clássico da matemática



Fonte: Produção do pesquisador (2024).

Origens do Problema

Formulado em 1696 por Johann Bernoulli, o problema foi lançado como desafio a grandes matemáticos de sua época, incluindo Isaac Newton, Gottfried Leibniz e Jacob Bernoulli. Tornou-se rapidamente uma referência na história do cálculo variacional, inaugurando uma nova forma de pensar problemas que envolvem otimização.

A Solução

Resolver o problema requer encontrar a curva $y(x)$ que minimize o tempo de descida da partícula. Com auxílio do cálculo e da mecânica, conclui-se que a curva ideal é uma cicloide invertida, definida parametricamente por:

$$x = r(\theta - \sin \theta), \quad y = r(1 - \cos \theta)$$

Onde:

- r é o raio da cicloide;
- θ é o parâmetro angular.

Essa solução se conecta ao princípio de Fermat, que afirma que a luz sempre segue o caminho de menor tempo — neste caso, aplicado ao movimento de partículas.

Contribuições Notáveis

- **Isaac Newton:**

Resolveu o problema em apenas uma noite, usando métodos geométricos, e mostrou a conexão com as leis do movimento.

- **Johann e Jacob Bernoulli:**

Johann apresentou a primeira solução completa usando conceitos de energia cinética e potencial. Jacob, por sua vez, ofereceu outra solução que ajudou a consolidar o problema como fundamental no estudo do cálculo variacional.

- **Gottfried Leibniz:**

Aplicou seu método de cálculo diferencial e integral para encontrar a solução, reforçando a interdisciplinaridade do problema.

Impacto na Matemática

O problema da braquistócrona impulsionou o desenvolvimento do **cálculo variacional**, ramo da matemática que busca encontrar funções que otimizam certas grandezas.

Além disso, abriu caminho para conceitos como:

- **Princípio da ação mínima** de Maupertuis;

- **Princípio de Hamilton**, base da mecânica clássica, óptica e teoria quântica.

Aplicações Modernas

O estudo da braquistócrona segue relevante em:

- **Engenharia de transportes:**

Aplicado em projetos de montanhas-russas e túneis otimizados.

- **Dinâmica de fluidos:**

Modelagem de fluxos que minimizam tempos de trânsito.

- **Óptica:**

Trajetórias da luz em diferentes meios.

Conclusão

Mais do que um desafio matemático histórico, o problema da braquistócrona é uma demonstração poderosa de como a matemática pode resolver questões práticas do mundo físico. Seu estudo marca a transição para uma matemática dinâmica e aplicada, legado que inspira até hoje.

Experimento Didático-Formativo

Objetivo Geral:

Desenvolver o pensamento teórico dos alunos ao explorar o problema da braquistócrona, com foco na otimização de trajetórias e na aplicação de conceitos de cálculo diferencial, geometria e física.

Ação 1: Transformação dos dados da tarefa

Objetivo Específico:

Compreender a relação entre o tempo mínimo de deslocamento e a forma da curva ideal (ciclóide).

Operações:

- Apresentação do problema histórico.
- Identificação de variáveis: gravidade, altura, tempo.
- Descoberta da curva cicloide como solução.
- Criação de um modelo gráfico da cicloide.

Ação 2: Modelação da relação universal**Objetivo Específico:**

Representar graficamente e simbolicamente a relação entre tempo de deslocamento e a forma da curva.

Operações:

- Desenho da cicloide e de outras trajetórias para comparação.
- Formalização da equação da cicloide.
- Simulação do deslocamento ao longo das diferentes trajetórias.

Ação 3: Estudo das propriedades do modelo**Objetivo Específico:**

Investigar como variações no ponto de partida ou na gravidade afetam o tempo de deslocamento.

Operações:

- Aplicação do modelo em diferentes cenários.
- Análise comparativa com outras curvas.
- Generalização para outras trajetórias otimizadas.
- Refinamento do modelo considerando fatores como atrito.

Ação 4: Sistema de tarefas particulares**Objetivo Específico:**

Aplicar o modelo da cicloide em novos problemas de otimização.

Operações:

- Criação de problemas variados sobre trajetórias ideais.
- Resolução dos problemas com base na equação da cicloide.
- Exploração de variações nas condições do problema.
- Desenvolvimento de um algoritmo para determinar a curva ideal.

Ação 5: Controle sobre as ações anteriores**Objetivo Específico:**

Avaliar a compreensão dos alunos.

Operações:

- Verificação das respostas.
- Discussão das dificuldades enfrentadas.
- Autoavaliação dos grupos sobre o processo de aprendizagem.

Ação 6: Avaliação da assimilação do procedimento geral**Objetivo Específico:**

Confirmar a internalização do procedimento geral.

Operações:

- Aplicação do conceito em novos contextos e desafios.
- Discussão em grupo sobre adaptação do modelo a outras situações.
- Autoavaliação final sobre a aprendizagem e aplicações do conceito.

Conclusão do Experimento

Os alunos terão compreendido profundamente o problema da braquistócrona e a importância da otimização de trajetórias. Trabalhando com a solução histórica da cicloide, integrarão conhecimentos de matemática e física, desenvolvendo pensamento teórico e crítico. Este processo acompanha a proposta de ascensão do concreto ao abstrato e retorno ao concreto, da Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov.

Construção do Artefato: Problema da Braquistócrona

Objetivo:

Construir um modelo prático para demonstrar o conceito da curva braquistócrona por meio de trilhos com diferentes formas.

Materiais Necessários:

- Três trilhos: reto, parabólico e em formato de cicloide.
- Esferas de aço, vidro ou plástico.
- Base inclinada (aprox. 1 metro de altura).
- Cronômetros.
- Marcadores para pontos de partida e chegada.
- Régua ou fita métrica.
- Cola ou fixadores.

Passo a Passo:

1. Preparação da base:

Instale a base inclinada para fixar os trilhos.

2. Construção dos trilhos:

- *Trilho reto*: Direto do ponto A ao B.
- *Trilho parabólico*: Curva suave.
- *Trilho cicloide*: Curva mais acentuada no início, suavizando ao final.

3. **Fixação dos trilhos:**

Assegure que todos tenham o mesmo ponto de início e fim.

4. **Teste com esferas:**

Solte as esferas simultaneamente e cronometre o tempo de descida.

5. **Medição dos tempos:**

Compare os resultados. A esfera no trilho em formato de cicloide deve chegar primeiro, mesmo percorrendo um caminho mais longo.

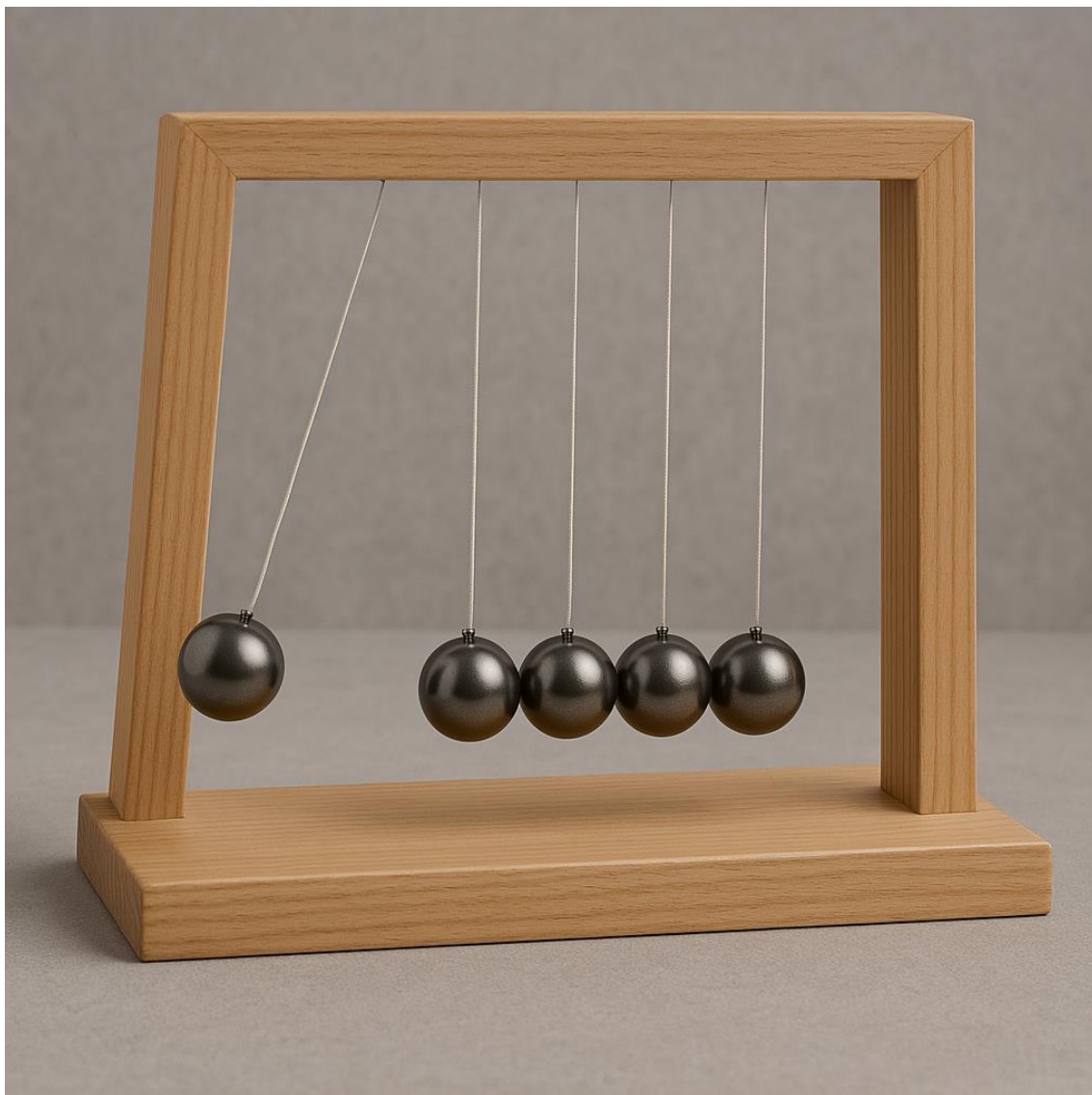
Explicação Pedagógica:

Este artefato evidencia visual e experimentalmente que a curva braquistócrona permite uma descida mais rápida, mesmo percorrendo uma distância maior, e reforça a importância dos conceitos de tempo mínimo e otimização na física e na matemática.

8 O PÊNDULO DE NEWTON

O Pêndulo de Newton, também conhecido como "Bolas de Newton", é um dispositivo clássico que ilustra, de maneira visual e prática, princípios fundamentais da mecânica clássica, como a conservação de energia e da quantidade de movimento. Apesar do nome, não há evidências de que Isaac Newton tenha criado ou descrito o dispositivo. Sua popularização ocorreu posteriormente, como uma homenagem ao trabalho de Newton nas leis do movimento.

Figura 9: Esferas de Newton



Fonte: Elaborada pelo autor a partir de imagem gerada por inteligência artificial (DALL·E, 2024).

O Pêndulo de Newton: História, Física e Aplicações

O Pêndulo de Newton, também conhecido como "Bolas de Newton", é um dispositivo clássico que ilustra, de maneira visual e prática, princípios fundamentais da mecânica clássica, como a conservação de energia e da quantidade de movimento. Apesar do nome, não há evidências de que Isaac Newton tenha criado ou descrito o dispositivo. Sua popularização ocorreu posteriormente, como uma homenagem ao trabalho de Newton nas leis do movimento.

O que é o Pêndulo de Newton?

O Pêndulo de Newton consiste em uma série de esferas idênticas suspensas por fios, alinhadas horizontalmente de forma que cada esfera toque a outra em repouso. Quando uma ou mais esferas são deslocadas e liberadas, elas colidem com as demais, gerando movimentos que ilustram com clareza os conceitos físicos.

Fenômenos principais observados:

1. Conservação de Energia:

A energia cinética transferida nas colisões é quase totalmente conservada (desconsiderando perdas por atrito e deformações).

2. Conservação da Quantidade de Movimento:

A quantidade de movimento (produto da massa pela velocidade) é transferida entre as esferas, mantendo-se constante no sistema.

História e Origens

Embora frequentemente associado ao nome de Newton, o dispositivo foi descrito mais tarde por Edme Mariotte, cientista francês que estudou colisões elásticas no século XVII.

Foi apenas no século XX que o pêndulo se popularizou como ferramenta de demonstração das leis de Newton, sobretudo em ambientes educacionais.

Funcionamento e Física Envolvida

1. Quando uma esfera é levantada e liberada:

Ela transfere sua energia e quantidade de movimento para a esfera oposta, que se desloca com velocidade similar.

2. Quando duas ou mais esferas são levantadas:

O mesmo número de esferas na extremidade oposta se desloca, respeitando a conservação da quantidade de movimento.

3. Colisões Elásticas:

O comportamento ideal assume colisões perfeitamente elásticas, sem perda de energia durante o impacto.

4. Equações Fundamentais:

As equações de conservação da energia e da quantidade de movimento explicam a transferência entre as esferas.

Aplicações e Importância

O Pêndulo de Newton tem diversas aplicações e também serve como símbolo visual de equilíbrio e continuidade.

1. Ensino de Física e Engenharia:

Utilizado para demonstrar, de forma prática, as leis da conservação de energia e da quantidade de movimento.

2. Design e Estética:

Tornou-se um objeto decorativo associado à ciência e ao movimento contínuo.

3. Psicologia e Simbolismo:

Representa a transferência de energia e o impacto das ações em sistemas interconectados.

4. Pesquisa em Dinâmica de Impactos:

É uma referência inicial para entender colisões em sistemas mais complexos, como na física de partículas.

Limitações

- As esferas não colidem perfeitamente, o que gera perdas de energia.

- Em condições reais, o atrito nos pontos de suspensão e a resistência do ar reduzem o tempo de movimento.
- Não ilustra colisões inelásticas, onde parte da energia é dissipada por deformação.

Conclusão

O Pêndulo de Newton é uma criação elegante que conecta conceitos fundamentais da física a uma apresentação visual clara e instigante. Mesmo com suas limitações, continua sendo uma ferramenta eficaz para despertar a curiosidade científica e reforçar o entendimento das leis de Newton, inspirando estudantes de todas as idades.

Contextualização e Motivação Inicial

Objetivo:

Introduzir o conceito do Pêndulo de Newton e captar o interesse dos alunos.

- **Exposição do Artefato:**

- ✓ O professor apresenta o Pêndulo de Newton e faz uma breve demonstração.
- ✓ Estimula os alunos a formularem hipóteses sobre o que acontece ao movimentar diferentes números de esferas.

- **Conexão com a Matemática:**

- Explicar que o objetivo da aula será analisar matematicamente os padrões do movimento, explorando proporcionalidade, funções e periodicidade.

Ação 1: Exploração Inicial e Observação

Objetivo:

Familiarizar os alunos com o funcionamento do Pêndulo de Newton e iniciar a coleta de dados.

1. **Divisão em Grupos:**

- ✓ Cada grupo recebe um mini pêndulo ou improvisa um modelo.
- ✓ Realizam experimentos deslocando diferentes números de esferas (1, 2, 3, etc.).

2. **Registro das Observações:**

- ✓ Número de esferas deslocadas.
- ✓ Comportamento das esferas do lado oposto.
- ✓ Tempo até o sistema retornar ao equilíbrio.

3. **Análise Inicial:**

- ✓ Os grupos discutem padrões percebidos.

Ação 2: Descoberta de Relações Matemáticas

Objetivo:

Construir modelos matemáticos para descrever o funcionamento do pêndulo.

1. **Discussão Guiada:**

- ✓ Explorar relações entre número de esferas movimentadas, reação das esferas opostas e tempo de oscilação.

2. **Construção de Gráficos e Tabelas:**

- ✓ Representar dados coletados e identificar padrões.

3. **Formalização Matemática:**

- ✓ Desenvolver regras que descrevam as relações observadas, como a oscilação periódica e proporcionalidade.

Ação 3: Aplicação Prática

Objetivo:

Resolver problemas usando os modelos desenvolvidos.

1. **Problemas Propostos:**

- ✓ Ex.: "Quantas esferas precisam ser deslocadas para que três se movam do lado oposto?"

2. Simulações e Testes:

- ✓ Os alunos testam suas previsões e ajustam os cálculos conforme necessário.

Ação 4: Avaliação e Reflexão

Objetivo:

Consolidar o aprendizado e avaliar a compreensão.

1. Discussão em Grupo:

- ✓ Analisar conceitos aplicados e desafios enfrentados.

2. Reflexão Individual:

- ✓ Responder: "Como o Pêndulo de Newton demonstra a aplicação da matemática no mundo real?"

3. Revisão do Professor:

- ✓ Revisar tabelas, gráficos e conclusões dos alunos, conectando-os a conceitos de energia, sistemas periódicos e funções.

Aspectos Pedagógicos e Interdisciplinares

• Interdisciplinaridade:

Relação com Física (conservação de energia), Engenharia e Tecnologia.

• Desenvolvimento de Competências:

- Matemática: Modelagem, análise de padrões e representação gráfica.
- ✓ Colaboração: Trabalho em grupo.
- ✓ Pensamento Crítico: Análise e ajustes dos modelos.

Resultados Esperados

Ao final da aula, os alunos deverão ser capazes de:

1. Identificar e descrever padrões do funcionamento do Pêndulo de Newton.
2. Construir modelos matemáticos simples para explicar esses padrões.
3. Aplicar os modelos para resolver problemas e fazer previsões.
4. Reconhecer as conexões entre matemática e situações práticas do cotidiano.

Construção do Artefato: Pêndulo de Newton

Objetivo:

Construir um modelo funcional do Pêndulo de Newton para observação prática.

Materiais Necessários:

- Esferas (5 a 7 unidades): bolas de aço ou rolamentos.
- Fios de nylon ou barbante fino.
- Estrutura de suporte (madeira, cabide ou estrutura similar).
- Cola epóxi para fixar os fios às esferas.
- Régua para alinhar as esferas.
- Tesoura ou alicate.
- Fita adesiva ou grampos (opcional).

Passo a Passo:

1. Preparação da Estrutura:

- ✓ Construa uma base estável, em formato de “U” invertido.

2. Corte dos Fios:

- ✓ Fios de igual comprimento para alinhamento das esferas.

3. Fixação dos Fios às Esferas:

- ✓ Cole os fios no topo das esferas com epóxi.

4. Pendurar as Esferas:

- ✓ Prenda os fios na barra superior da estrutura.

5. Ajuste do Alinhamento:

- ✓ As esferas devem ficar alinhadas e quase se tocando.

6. Testes:

- ✓ Puxe uma ou mais esferas e solte. Observe o funcionamento e faça ajustes se necessário.

Dicas para Melhor Resultado:

- Utilize esferas de aço para maximizar a eficiência.
- Verifique a tensão dos fios.
- Use um nível para garantir o alinhamento horizontal.

Personalizações:

- Decoração e pintura das esferas.
- Exploração de diferentes tamanhos para observação de variações no movimento.

Segurança:

- Garanta que a estrutura esteja firme e segura, especialmente se for usada com crianças.

9 MÁQUINA A VAPOR DE HERON

A máquina a vapor de Heron, também conhecida como *Aeolípila*, é considerada o primeiro dispositivo a vapor registrado na história. Inventada no século I d.C. pelo matemático e engenheiro grego Heron de Alexandria, esse mecanismo simples, mas revolucionário, marca o início da utilização da energia do vapor como força motriz.

Figura 10: Dispositivo a vapor de Heron



Fonte: Produção do pesquisador (2024).

Contexto Histórico

Heron de Alexandria foi um prolífico inventor e escritor técnico que viveu no Egito sob domínio romano. Suas obras, como *Pneumatica*, detalham uma série de dispositivos movidos a ar, vapor e pressão hidráulica, muitos dos quais eram usados para entretenimento e demonstrações científicas.

A *Aeolípila*, descrita em *Pneumatica*, consistia em uma esfera oca que girava sob a força do vapor emitido por bocais angulados. Embora tenha sido um avanço notável,

seu potencial prático não foi explorado para fins industriais ou comerciais na época, sendo vista principalmente como uma curiosidade científica.

Funcionamento

A máquina consistia em três partes principais:

1. **Recipiente de água aquecido:** geralmente uma caldeira ou base para ferver a água.
2. **Esfera oca montada em um pivô:** conectada à caldeira por tubos.
3. **Bocais angulados:** por onde o vapor escapava, gerando torque e fazendo a esfera girar.

O calor aplicado fazia a água ferver, e o vapor subia pelos tubos até a esfera. O vapor escapava pelos bocais inclinados, criando movimento de rotação pela força de reação.

Relevância e Limitações

Embora tenha sido um marco no uso do vapor como fonte de energia, a *Aeolípila* teve impacto limitado na época devido a dois fatores principais:

1. **Percepção como curiosidade:** Vista como um dispositivo de entretenimento ou demonstração científica, e não como uma máquina para uso prático.
2. **Falta de tecnologia complementar:** A ausência de engrenagens e sistemas de transmissão mecânica impediu sua aplicação em larga escala.

Ainda assim, a invenção de Heron foi uma demonstração brilhante dos princípios da física aplicados ao vapor e à mecânica.

Contribuições Científicas

- **Pioneirismo:** Heron foi o primeiro a aplicar vapor de forma controlada para gerar movimento mecânico, lançando as bases da termodinâmica.
- **Inspiração para gerações futuras:** Sua criação inspirou engenheiros e cientistas séculos depois, especialmente durante a Revolução Industrial.

Impacto Moderno

Embora não tenha sido aplicada como máquina prática em sua época, a *Aeolípila* antecipou o funcionamento das máquinas a vapor que revolucionaram a indústria no século XVIII, com nomes como Thomas Newcomen e James Watt.

Conclusão

A máquina a vapor de Heron é um exemplo notável da engenhosidade antiga, demonstrando a curiosidade científica e a busca por compreender os fenômenos naturais. Sua importância histórica vai além da aplicação prática imediata, pois abriu caminho para a exploração do vapor como fonte de energia e para o desenvolvimento das tecnologias térmicas modernas.

Experimento Didático-Formativo: Máquina de Heron

Objetivo Geral:

Desenvolver o pensamento teórico dos alunos por meio da compreensão dos princípios físicos e matemáticos da máquina de Heron, explorando pressão, força, torque e a conversão de energia térmica em energia mecânica.

Ação 1: Revelação da Relação Universal

Objetivo:

Compreender como o aumento da pressão do vapor gera força suficiente para produzir movimento rotacional.

Operações:

- Apresentação da máquina de Heron e demonstração do funcionamento básico.
- Identificação das variáveis: quantidade de água, temperatura, pressão do vapor e formato dos bicos.
- Descoberta da relação entre pressão do vapor e rotação da máquina.
- Criação de modelos gráficos ilustrando a geração de torque pelo vapor.

Ação 2: Modelação da Relação Universal

Objetivo:

Representar matematicamente a conversão de energia térmica em energia mecânica.

Operações:

- Construção de gráficos relacionando pressão e velocidade de rotação.
- Formalização da relação pressão-torque com uma equação matemática.
- Simulações para observar a influência da pressão na rotação da máquina.

Ação 3: Estudo das Propriedades do Modelo**Objetivo:**

Investigar como diferentes pressões e designs de bicos afetam a eficiência do movimento rotacional.

Operações:

- Cálculos aplicando o modelo para diferentes pressões e designs.
- Análise de eficiência de acordo com as variações de design.
- Comparação com outros dispositivos térmico-mecânicos.
- Refinamento do modelo para incluir fatores como atrito e altura do eixo.

Ação 4: Aplicação do Modelo em Problemas Práticos**Objetivo:**

Consolidar o conhecimento aplicando o modelo a diferentes situações.

Operações:

- Criação de novos problemas envolvendo força e torque da máquina.
- Resolução das tarefas utilizando o modelo matemático.
- Exploração de variações no projeto da máquina para otimização.
- Desenvolvimento de um algoritmo geral para cálculos da máquina de Heron.

Ação 5: Controle e Avaliação das Ações Anteriores

Objetivo:

Avaliar a compreensão dos alunos sobre os conceitos de pressão, torque e movimento rotacional.

Operações:

- Revisão dos cálculos e soluções dos alunos.
- Discussão sobre as dificuldades e superação de desafios.
- Autoavaliação da aprendizagem.

Ação 6: Avaliação Final da Assimilação do Procedimento

Objetivo:

Verificar a internalização do conceito e sua aplicação em novos contextos.

Operações:

- Aplicação dos princípios da máquina de Heron em novos desafios, como comparação com turbinas modernas.
- Discussão sobre possíveis adaptações do modelo para outras aplicações térmicas.
- Reflexão final sobre o processo de aprendizagem.

Construção do Artefato: Máquina de Heron

Objetivo:

Construir uma *Aeolípila* funcional para demonstrar a conversão de energia térmica em energia mecânica.

Materiais:

- Esfera oca metálica
- Tubos de cobre
- Tampas de garrafa ou rolamentos
- Fonte de calor portátil
- Arame para suporte
- Cola epóxi resistente ao calor
- Água
- Base de suporte (madeira ou metal)
- Alicates, furadeira, serra pequena, fita isolante

Passo a Passo:

1. Preparar a esfera metálica com dois furos opostos.
2. Instalar tubos de cobre curvados nos furos.
3. Vedação cuidadosa com cola epóxi.
4. Criar um eixo para a esfera e fixá-la na estrutura de suporte.
5. Encher parcialmente com água.
6. Aquecer a esfera até gerar vapor.
7. Observar a rotação causada pela liberação do vapor.

Dicas de Segurança:

- Utilize proteção ao manusear calor.
- Realize o experimento em local bem ventilado.

Este experimento não apenas ensina conceitos fundamentais de física, mas também contextualiza a importância histórica da máquina de Heron, aproximando teoria e prática de forma envolvente e acessível.

10 ASTROLÁBIO

O astrolábio é um dos instrumentos científicos mais antigos e versáteis, utilizado por séculos para medir a posição dos astros, determinar horários e auxiliar na navegação. Sua origem remonta à Antiguidade clássica, mas seu desenvolvimento e aplicação atravessaram várias culturas, dos gregos antigos aos árabes e europeus medievais.

Figura11: Instrumento para medir a posição dos astros



Fonte: elaborada pelo autor a partir de imagem gerada por inteligência artificial (DALL·E, 2024).

Origem e Desenvolvimento

1. Raízes na Antiguidade Grega:

✓ O conceito do astrolábio é atribuído ao astrônomo grego Hiparco de Niceia (século II a.C.), que desenvolveu a projeção estereográfica — um método matemático que permite representar uma

esfera (como o céu) em uma superfície plana. Esse princípio é a base do funcionamento do astrolábio.

✓ A invenção do astrolábio propriamente dito é creditada a Cláudio Ptolomeu (século II d.C.), que descreveu um instrumento semelhante em sua obra *Almagesto*.

2. Desenvolvimento Islâmico:

✓ O astrolábio atingiu seu auge durante a Idade de Ouro Islâmica (séculos VIII a XIII), quando foi aprimorado e amplamente utilizado por astrônomos como Al-Farghani, Al-Zarqali e Al-Battani.

✓ Os artesãos islâmicos produziram versões altamente precisas e detalhadas, adicionando escalas que permitiam cálculos avançados, como a determinação dos horários das orações e a orientação para Meca.

3. Disseminação na Europa:

✓ O astrolábio chegou à Europa por meio das traduções de textos árabes durante o Renascimento Carolíngio e foi amplamente adotado na Idade Média.

✓ Grandes estudiosos europeus, como Gerardo de Cremona e Regiomontanus, contribuíram para sua disseminação, especialmente nas áreas de astronomia e navegação.

Estrutura do Astrolábio

O astrolábio é composto por diversas partes que colaboram para suas múltiplas funções:

- **Mater:** A base circular do instrumento, que abriga os componentes principais.
- **Rete:** Uma grade que representa as estrelas fixas e gira em torno de um eixo central.
- **Almucântaras:** Linhas circulares que representam altitudes no céu.
- **Placas:** Discos intercambiáveis gravados para diferentes latitudes.
- **Alidade:** Régua móvel usada para alinhar o astrolábio com os astros.

Usos do Astrolábio

O astrolábio era um instrumento multifuncional, utilizado em diversas áreas:

1. **Astronomia:**

- ✓ Determinação da altura de estrelas e planetas acima do horizonte.
- ✓ Cálculo da hora local com base na posição do Sol ou das estrelas.

2. **Navegação:**

- ✓ Auxílio aos navegadores para determinar a latitude no mar.
- ✓ Facilitação da orientação pelas estrelas.

3. **Religião:**

- ✓ No mundo islâmico, era utilizado para definir o momento exato das orações e a direção de Meca (qibla).

4. **Educação:**

- ✓ Ferramenta pedagógica para ensinar princípios de astronomia e geometria esférica.

Declínio e Legado

Com o advento de instrumentos mais avançados, como o sextante no século XVIII, o uso do astrolábio começou a declinar. Contudo, ele permaneceu valorizado como ferramenta educativa e artefato histórico.

Seu legado é duradouro:

- Reconhecido como uma conquista científica que simboliza a fusão entre astronomia, matemática e engenharia.
- Suas inovações influenciaram o desenvolvimento de instrumentos modernos de observação e medição.

Conclusão

O astrolábio é uma prova da engenhosidade humana ao longo da história, representando o esforço de várias civilizações para compreender e explorar o cosmos.

Mais do que um simples instrumento, ele simboliza a curiosidade científica e o intercâmbio cultural entre Oriente e Ocidente. Séculos após sua invenção, continua a inspirar astrônomos, historiadores e admiradores da ciência.

Experimento Didático-Formativo: Astrolábio

Objetivo Geral:

Desenvolver o pensamento teórico dos alunos por meio da exploração do astrolábio, focando na medição de ângulos de altura, localização de corpos celestes e aplicação prática da trigonometria básica.

Ação 1: Transformação dos Dados da Tarefa para Revelar a Relação Universal

Objetivo Específico:

Introduzir a medição de ângulos de altura e sua relação com a trigonometria.

Operações:

- Apresentação do astrolábio e de suas partes principais: limbo, alidade e fio de prumo.
- Identificação das variáveis: ângulo de elevação, posição da alidade e leitura do fio de prumo.
- Compreensão da medição angular através do movimento da alidade.
- Construção de um diagrama representando o triângulo formado pelo observador, o astrolábio e o objeto observado.

Ação 2: Modelação da Relação Universal

Objetivo Específico:

Modelar matematicamente a relação entre o ângulo medido e a altura do objeto.

Operações:

- Desenho de um triângulo retângulo representando o cenário de medição.

- Formalização da relação com a fórmula da tangente:

$$\tan(\theta) = \text{altura} / \text{distância},$$

onde θ é o ângulo de elevação medido.

- Simulação de diferentes ângulos e distâncias para calcular variadas alturas.

Ação 3: Transformação do Modelo para Estudo de Propriedades

Objetivo Específico:

Explorar como diferentes ângulos influenciam a medição da altura.

Operações:

- Aplicação da fórmula para calcular alturas de diversos objetos.
- Discussão sobre a influência da distância do observador na precisão da medição.
- Comparação do astrolábio com outros métodos de medição de altura.

Ação 4: Construção de Tarefas Particulares para Procedimento Geral

Objetivo Específico:

Aplicar o modelo em diferentes situações práticas.

Operações:

- Criação de problemas envolvendo a medição de objetos altos, como prédios ou montanhas.
- Resolução das tarefas com o astrolábio, aplicando as fórmulas adequadas.
- Correção colaborativa das soluções e discussão dos cálculos.

Ação 5: Controle sobre as Ações Anteriores

Objetivo Específico:

Avaliar o progresso dos alunos na utilização do astrolábio e na aplicação da trigonometria.

Operações:

- Revisão das medições e cálculos.
- Discussão das dificuldades enfrentadas e possíveis ajustes.
- Autoavaliação dos alunos sobre seu desempenho.

Ação 6: Avaliação da Assimilação do Procedimento Geral**Objetivo Específico:**

Verificar a internalização dos conceitos e sua aplicação em novos contextos.

Operações:

- Proposição de novos desafios pelo professor.
- Discussão em grupo sobre a eficácia do astrolábio e comparação com outros instrumentos.
- Reflexão final sobre a relevância histórica e prática do astrolábio.

Conclusão do Experimento

Ao final do experimento, espera-se que os alunos compreendam como o astrolábio mede ângulos de altura e como aplicar a trigonometria para calcular alturas de objetos. O experimento destaca a importância do astrolábio na evolução da ciência e da navegação, demonstrando sua conexão entre matemática e astronomia de forma prática e histórica.

Construção do Artefato: Astrolábio Funcional**Materiais Necessários:**

- Placa de papelão rígido ou madeira fina (aprox. 20 cm de diâmetro)
- Impressão de modelo de astrolábio
- Transferidor
- Barbante (aprox. 30 cm)
- Pequeno peso (porca metálica ou pedra)
- Pino metálico ou tachinha
- Régua, tesoura, cola ou fita adesiva, lápis ou caneta

- Furador ou alfinete grosso

Passo a Passo:

1. Corte da base:

Corte um círculo de cerca de 20 cm de diâmetro e marque seu centro.

2. Aplicação do modelo:

Imprima e cole o modelo de astrolábio alinhado ao centro da base.

3. Escala angular:

Com o transferidor, desenhe uma escala de 0° a 90° na borda do astrolábio.

4. Construção da alidade:

Faça uma régua móvel com furo em cada extremidade e fixe-a no centro do astrolábio.

5. Adição do fio de prumo:

Amarre o barbante ao centro inferior do astrolábio e prenda o peso na extremidade livre.

6. Calibração:

Segure o astrolábio de modo que o fio de prumo fique livre e perpendicular ao solo.

7. Teste:

Mire a alidade para um objeto alto e faça a leitura do ângulo na escala.

Dicas de Segurança e Melhorias:

- Nunca observe o Sol diretamente!
- Para maior durabilidade, use materiais como acrílico ou metal fino.
- Adicione suporte para facilitar o uso em campo.

FINALIZANDO...

Chegamos ao fim deste caderno pedagógico, mas esperamos que ele marque apenas o começo de muitas descobertas! Que as experiências vividas na construção dos artefatos históricos e nas atividades propostas despertem ainda mais a curiosidade e o entusiasmo de professores e alunos.

Aqui, buscamos mais do que ensinar conteúdos: desejamos provocar perguntas, inspirar olhares atentos ao que está ao nosso redor e mostrar que a matemática e as ciências fazem parte da vida real, das soluções criativas e das grandes invenções da humanidade. Cada experimento, cada construção de modelo, cada reflexão que nasce deste material é uma ponte entre o passado e o futuro, entre a teoria e a prática, entre a escola e o mundo.

Que este caderno se torne uma ferramenta de transformação nas mãos de quem ensina e de quem aprende — um lembrete de que o conhecimento cresce quando é vivido com entusiasmo, curiosidade e coragem para explorar o desconhecido. Afinal, a aventura do saber nunca termina: ela se renova a cada experiência, a cada desafio e a cada olhar curioso lançado sobre o mundo!

A você, professor ou estudante, nosso sincero agradecimento por acreditar na força do conhecimento construído com as próprias mãos, no trabalho coletivo e na alegria da descoberta. Que este caderno se torne uma inspiração constante para ir além das páginas, para criar, experimentar e transformar ideias em experiências significativas.

A jornada do saber não termina aqui — pelo contrário, é apenas o começo. Levem adiante essa vontade de aprender e partilhar, pois cada passo dado em direção ao conhecimento abre novos caminhos para todos nós.

Obrigado por caminhar conosco nesta trajetória!

REFERÊNCIAS

DAVÍDOV, V. V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico**: investigación psicológica teórica e experimental. Moscou: Editorial Progreso, 1989.

DAVÍDOV, V. V. **Problemas do Ensino Desenvolvidor**: investigação psicológica teórica e experimental. 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2008.

DAVÍDOV, V. V. **Tipos de generalização no ensino**. São Paulo: Editora Unesp, 1988.

DUARTE, N. **Vigotski e o “aprender a aprender”**: crítica às apropriações neoliberais e pós-modernas da teoria vigotskiana. 4. ed. Campinas: Autores Associados, 2010.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 3. ed. São Paulo: Unicamp, 2004.